SULLA RICERCA
DEL CENTRO DI GRAVITÀ O D'INERZIA
D'ALCUNE LINEE PIANE

MEMORIA

DEL PROF. GIOVANNI BARSOTTI

PRESENTATA

ALLA REALE ACCADEMIA LUCCHESE

nella tornata de' 29 aprile 1842.

LUCCA
PRESSO FELICE BERTINI TIP. DUCALE
1843

Dichiarazione

L'attuale Memoria ha per iscopo d'esibire alla Gioventù Studiosa alcuni esempj d'applicazione delle formole per la ricerca del centro di gravità delle linee piane uniformemente pesanti, riferite a due assi ortogonali. Il pregio dunque che può avere in altro non consiste che nella moltiplicità e varietà di tali esempj, pe' quali, oltre la retta finita e una porzione qualunque di curva circolare e di cicloide, che sono ordinariamente considerate nei Corsi di Meccanica, abbiamo preso in esame un arco qualunque di parabola, d'ellisse e d'iperbola, ed uno consimile di logaritmica e di catenaria omogenea. Ma in ciò fare abbiamo voluto anteporre le curve algebriche alle curve trascendenti.

---

§ 1. Le coordinate X, Y del centro di gravità d'un arco ci vengono date dalla Meccanica colle formole

$$(A) \ldots\ldots\ldots\ldots X=\frac{\int x dl}{\int dl}, \quad Y=\frac{\int y dl}{\int dl},$$

nelle quali 1.o la l rappresenta una porzione qualsivoglia dell' arco stesso, misurata dall' origine degli archi, e la dl il suo elemento adiacente al punto di coordinate rettangole x, y; e 2o gli integrali $\int x dl, \int y dl, \int dl$ si debbono definire trai valori delle variabili x, y, l, relativi al primo e secondo limite di quell' arco.

Per il conseguimento de' due primi di questi integrali converrà, quasi sempre, esprimere le funzioni $x dl$, $y dl$ per una sola variabile. A quest' effetto ci gioveremo del noto rapporto $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ e della equazione della curva anzidetta.

In quanto poi al terzo dei predetti integrali vuolsi avvertire che, chiamando $l_{\prime}$, $l_{\prime\prime}$ i valori della l pe' punti estremi dell' arco dato, ed essendo per conseguenza $l_{\prime\prime}-l_{\prime}$ la lunghezza di questo, abbiamo $\int_{l_{\prime}}^{l_{\prime\prime}} dl = l_{\prime\prime} - l_{\prime}$.

Bramando però quest' integrale espresso per le coordinate $x_{\prime}$, $y_{\prime}$; $x_{\prime\prime}$ $y_{\prime\prime}$ de' punti suddetti; ci varremo dell' indicato rapporto, elimineremo se occorra tra esso e l'equazione della curva o la y, o la x, esprimendo così la differenziale dl solamente o per le x, dx, o per le y, dy, ed integreremo la differenziale medesima trai valori di quelle coordinate.

Del resto, atteso il rapporto e l'equazione di che sopra, potremo se ci piace ridurre le coordinate X, Y in funzione delle sole o $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, o $y_{\prime}$, $y_{\prime\prime}$, o $l_{\prime}$, $l_{\prime\prime}$, o promiscuamente delle une e delle altre.

Le formole (A) riduconsi facilmente alle

$$(B) \ldots\ldots\ldots \quad X = \frac{\int x dl}{\int d l}, \; Y = 0,$$

o alle

$$(C) \ldots\ldots\ldots \quad X = 0, \; Y = \frac{\int y dl}{\int d l},$$

quando invece d' un arco solo ne abbiamo due simmetrici attorno o all' asse delle x, o a quello delle y. Su di che dobbiamo anche notare che, se gli archi qui detti si congiungono in uno, e se si pone l' origine tanto delle coordinate quanto degli archi nel loro punto d' unione, avendosi $x_{\prime} = 0$, $y_{\prime} = 0$, $l_{\prime} = 0$, è

$$\int_{l_{\prime}}^{l_{\prime\prime}} dl = \int_{0}^{l_{\prime\prime}} dl = l_{\prime\prime}.$$

Dopo queste premesse passiamo a risolvere i seguenti problemi.

PROBLEMA I.

TROVARE IL CENTRO DI GRAVITA' D' UNA RETTA FINITA.

§ 2. Se si prende la retta data per asse delle x, ed uno de' suoi punti estremi per origine delle coordinate, abbiamo

$$dl = dx,$$

e per risolvere il propostoci problema possiamo ricorrere alle formole (B). Essendo dunque

$$\int x dl = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C',$$

$$\int dl = \int dx = x + C'',$$

se si comprendono questi integrali tra $x=0$, ed $x=x_{,,}$, per le citate formole si ottiene

$$X=\frac{x_{,,}}{2}\,,\ Y=0.$$

Dunque il centro di gravità di una retta finita è nel suo punto di mezzo.

PROBLEMA II.

TROVARE IL CENTRO DI GRAVITA' D'UN ARCO QUALUNQUE DI CURVA CIRCOLARE.

§ 3. Ponendo l'asse delle x sul raggio che biparti-sce l'arco proposto e l'origine delle coordinate nel centro del circolo, è

$$x^2+y^2=r^2\,,$$

da cui differenziando

$$xdx+ydy=0,$$

e

$$dl=\frac{rdy}{x}\,;\ xdl=rdy.$$

Abbiamo dato alla dl il segno positivo giacchè, con assumere per principio degli archi il punto di mezzo dell'arco proposto, dal lato delle x positive le l, y crescono e decrescono insieme, e dal lato contrario, crescendo l'una di queste due quantità, l'altra diminuisce.

Dalle formole (B), sostituendo alla xdl il trovato valore, e integrando da $y=0$, $l=0$, sino ad $y=y_{,,}$, $l=l_{,,}$, risulta

$$X=\frac{ry_{,,}}{l_{,,}},\ Y=0.$$

Moltiplicando sopra e sotto per 2 il secondo membro della prima equazione, ed avvertendo dipoi che $2l_{,,}$, $2y_{,,}$ corrispondono all' arco dato e alla corda che lo sottende, concludiamo dunque: 1.o che il centro di gravità d' un arco di circolo è sul raggio che lo divide per metà, e 2.o che la distanza di esso centro da quello del circolo è quarta proporzionale dopo l' arco, la sua sottesa ed il raggio.

§ 4. Scolio. L'arco $l_{,,}$, espresso per le coordinate $x_{,,}$, $y_{,,}$ e pel raggio del circolo, ci vien dato dalle Applicazioni del calcolo superiore alla rettificazione delle curve. Ciò non ostante è facile vedere che, dall' essere

$$dl = \frac{rdy}{x} = \frac{rdy}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

risulta

$$l = C + r\int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

e che sviluppando la funzione $\left(r^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ in una serie ordinata per le potenze ascendenti della y, moltiplicando ciascun termine della serie medesima per rdy, ed eseguendo le integrazioni trai limiti di che sopra, si conseguisce

$$l_{,,} = y_{,,} + \frac{1.\ 3}{2.\ 4.\ 5}\frac{y_{,,}^3}{r^2} + \frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6.\ 7}\frac{y_{,,}^5}{r^4} + \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 9}\frac{y_{,,}^7}{r^6} + \text{ec.}$$

Eccone esempio. Per $y_{,,} = \frac{r}{2}$, è $l_{,,}$ la metà dell'arco di 60°. Rappresentando dunque con C la circonferenza

del circolo. e facendo per comodo $\pi=3,141592653....$, si ha

$$\frac{C}{6}=2r\left[\frac{1}{2}+\frac{1.\ 3}{2.\ 4.\ 5.\ 2^3}+\frac{1.\ 3.\ 5.}{2.\ 4.\ 6.\ 7.\ 2^4}+\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 9.\ 2^5}+\text{ec.}\right]$$

$$=2r,\ 0,523598\ 75\ldots=2r.\frac{6}{\pi},$$

quindi

$$C=2\pi r.$$

§ 5. Corollario. Poichè la frazione $\frac{22}{7}=3,14......$ si vede che possiamo fare prossimamente

$$\pi=\tfrac{22}{7};$$

e per conseguenza

$$C=\tfrac{44}{7}r.$$

Per la qual cosa gli archi maggiore e minore del circolo, sottesi dai lati dell' esagono e tetragono regolari iscritti e dal diametro, sono respettivamente

$$\frac{110}{21}r,\ \frac{22}{21}r,\ \frac{33}{7}r,\ \frac{11}{7}r,\ \frac{22}{7}r.$$

Or que' lati e quel diametro equivalgono ad

$$r,\ r,\ \frac{141}{100}r,\ \frac{141}{100}r,\ 2r;$$

dunque abbiamo di seguito

$$X=\frac{21}{110}r,\ \frac{21}{22}r,\ \frac{33}{110}r,\ \frac{9}{10}r,\ \frac{7}{11}r.$$

PROBLEMA III.

TROVARE IL CENTRO DI GRAVITÀ D'UN ARCO QUALUNQUE DI PARABOLA.

§ 6. Assumendo per asse delle x e per origine delle coordinate l'asse ed il vertice della parabola, l'equazione di questa curva è

$$y^2 = px ,$$

e differenziata somministra

$$2ydy = pdx ,$$

da cui

$$dl = \frac{dx}{2} \sqrt{\frac{4x+p}{x}} = \frac{dy}{p} \sqrt{p^2+4y^2} .$$

Qui pure è stata munita la dl del segno positivo perchè, con mettere anche l'origine degli archi al vertice della curva, le x, y, l crescono e decrescono simultaneamente. Diciamo pertanto

$$xdl = \frac{dx}{2} \sqrt{4x^2+px} ,$$

$$ydl = \frac{ydy}{p} \sqrt{p^2+4y^2} .$$

Per integrare la prima di queste funzioni giova scrivere

$$\sqrt{4x^2+px} = \tfrac{1}{4} (t-p-8x),$$

dove t rappresenta una nuova variabile, e dedurre

$$x = \frac{(t-p)^2}{16.\,t}, \quad dx = \frac{(t^2-p^2)\,dt}{16\,t^2},$$

$$\sqrt{4x^2+px} = \frac{t^2-p^2}{8t},$$

$$xdl = \frac{(t^2-p^2)^2 dt}{256 t^3} = \frac{dt}{256}\left[t + \frac{p^4}{t^3} - \frac{2p^2}{t}\right],$$

quindi

$$\int xdl = \frac{1}{256}\left[\frac{(t^2-p^2)(t^2+p^2)}{2t^2} - 2\,p^2\,log.\,t\right] + C'.$$

Ma siccome

$$t = p + 8x + 4\sqrt{4x^2+px},$$

$$t^2 - p^2 = 8\left(p + 8x + 4\sqrt{4x^2+px}\right)\sqrt{4x^2+px}$$
$$= 8t\sqrt{4x^2+px},$$

$$t^2 + p^2 = 2\left(p + 8x + 4\sqrt{4x^2+px}\right)(p+8x)$$
$$= 2t(p+8x),$$

$$\frac{(t^2-p^2)(t^2+p^2)}{2t^2} = 8\,(p+8x)\sqrt{4x^2+px},$$

così

$$\int xdl = \frac{1}{128}\left[4(p+8x)\sqrt{4x^2+px} - p^2\,log\left(p+8x+4\sqrt{4x^2+px}\right)\right] + C'.$$

Per integrare poi anche la seconda delle funzioni suddette, basta fare

$$p^2 + 4y^2 = z\ ,$$

e subito inferirne

$$\int y dl = \frac{1}{8p} \int dz \sqrt{z} = \frac{1}{12.p} \sqrt{z^3} + C'' :$$

cioè

$$\int y dl = \frac{1}{12.p} \sqrt{(p^2 + 4y^2)^3} + C''.$$

Comprendendo finalmente gl'integrali trai soliti valori delle x, y, l, per le formole (A), si ottiene

$$X = \frac{1}{128(l_{,,} - l_{,})} \left\{ 4 \left((p + 8x_{,,}) \sqrt{4x_{,,}^2 + px_{,,}} - (p + 8x_{,}) \sqrt{4x_{,}^2 + px_{,}} \right) \right.$$

$$\left. - p^2 log \frac{p + 8x_{,,} + 4\sqrt{4x_{,,}^2 + px_{,,}}}{p + 8x_{,} + 4\sqrt{4x_{,}^2 + px_{,}}} \right\},$$

$$Y = \frac{1}{12.p.(l_{,,} - l_{,})} \left[\sqrt{(p^2 + 4y_{,,}^2)^3} - \sqrt{(p^2 + 4y_{,}^2)^3} \right].$$

§ 7. Corollario. Quando l'arco proposto comincia dal vertice della parabola, con essere $x_{,} = o$, $y_{,} = o$, $l_{,} = o$, è

$$X = \frac{1}{128.l_{,,}} \left\{ 4 (p + 8x_{,,}) \sqrt{4x_{,,}^2 + px_{,,}} \right.$$

$$\left. - p^2 log \frac{p + 8x_{,,} + 4 \sqrt{4x_{,,}^2 + px_{,,}}}{p} \right\},$$

$$Y = \frac{1}{12.p.l_{,,}} \left[\sqrt{(p^2 + 4y_{,,}^2)^3} - p^3 \right].$$

§ 8. Scolio 1.° La prima formola di ciascuno de' due paragrafi precedenti, unita alla $Y=0$, offre (§ 1) la posizione del centro di gravità di due archi di parabola simmetrici attorno all' asse delle x, i quali, mentre per le une si suppongono separati dall' arco $2l_{,}$, per le altre si ritengono invece come congiunti al vertice della curva, e facienti per conseguenza un solo e medesimo arco $2l_{,,}$.

§ 9. Scolio 2.° Anche il valore dell' arco parabolico l, dal quale si traggono i due appartenenti ad $l_{,}$; $l_{,,}$ ci viene offerto dalle Applicazioni superiormente citate. Noi però, atteso essere $dl=\frac{dy}{p}\sqrt{p^2+4y^2}$, amiamo dedurlo dall' integrale della funzione $dy\sqrt{A^2+B^2y^2}$, che ne giova di rintracciare, tanto per questa quanto per altre indagini.

Facendo dunque

$$\sqrt{A^2+B^2y^2}=t-By\ ,$$

si ha

$$y=\frac{t^2-A^2}{2Bt},\ dy=\frac{t^2+A^2}{2Bt^2}\,dt,\ \sqrt{A^2+B^2y^2}=\frac{t^2+A^2}{2t}\ ,$$

$$dy\sqrt{A^2+B^2y^2}=\frac{dt}{4B}\left(t+\frac{2A^2}{t}+\frac{A^4}{t^3}\right),$$

e per conseguenza

$$\int dy\sqrt{A^2+B^2y^2}=\frac{1}{8B}\left[\frac{(t^2-A^2)(t^2+A^2)}{t^2}+4A^2\log.t\right]+C;$$

ma siccome

$$t=By+\sqrt{A^2+B^2y^2}\ ;$$

$$t^2 - A^2 = 2\left(By + \sqrt{A^2 + B^2y^2}\right)By = 2Bty..,$$

$$t^2 + A^2 = 2\left(By + \sqrt{A^2 + B^2y^2}\right)\sqrt{A^2 + B^2y^2} = 2t\sqrt{A^2 + B^2y^2}$$

$$\frac{(t^2 - A^2)(t^2 + A^2)}{t^2} = 4By\sqrt{A^2 + B^2y^2},$$

perciò

$$(\alpha)\ldots\ldots\int dy\sqrt{A^2 + B^2y^2} = \frac{y}{2}\sqrt{A^2 + B^2y^2} + \frac{A^2}{2B}\log\left(By + \sqrt{A^2 + B^2y^2}\right) + C$$

Per l'arco di che sopra, posto $A = p$, $B = 2$, da questa formola divisa per p, si ottiene

$$l = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2 + 4y^2} + \frac{p}{4}\log\left(2y + \sqrt{p^2 + 4y^2}\right) + C,$$

da cui i valori di $l_{,}$ $l_{,,}$ sostituendo ad y le $y_{,}$, $y_{,,}$.

§ 10. Corollario. Per applicare le formole de' paragrafi anteriori a un qualche esempio, cercheremo il centro di gravità dell'arco di parabola compreso tra il vertice della curva e il punto la cui ascissa equivale al parametro p.

Per esso punto è $x_{,,} = p$, $y_{,,} = p$, quindi (§ 7.)

$$X = \frac{p^2}{128\, l_{,,}}\left[36\sqrt{5} - \log\left(9 + 4\sqrt{5}\right)\right];$$

ma (§ precedente)

$$l_{,,} = \frac{p}{4}\left(2\sqrt{5} + \log\left(2 + \sqrt{5}\right)\right);$$

dunque

$$X=\frac{p}{52}\cdot\frac{80,496-log\ 17,236}{4,472+log\ \ 4,236}.$$

Per appurare questa frazione giova convertire i logaritmi neperiani che contiene ne' tabulari corrispondenti, e moltiplicare a quest' effetto numeratore e denominatore pel modulo 0, 4343,...... di questi ultimi. Così facendo e riducendo si ha

$$X=0,41.\ p.$$

PROBLEMA IV.

TROVARE IL CENTRO DI GRAVITA' D'UN ARCO QUALUNQUE D'ELLISSE.

§ 11. Ritenuti per assi delle x, y, e per origine delle coordinate i diametri maggiore $2a$, minore $2b$, ed il centro della ellisse, l'equazione di questa curva è

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

dalla quale risulta

$$a^2ydy+b^2xdx=0,$$

e

$$dl=\frac{dx}{a^2y}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}=-\frac{dy}{b^2x}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}.$$

Abbiamo preso la prima espressione della dl con segno positivo, e la seconda con segno negativo, 1.º perchè la l cresce continuamente colla x, e 2.º perchè la l stessa, mentre cresce colla y nella regione delle x ne-

gative, decresce crescendo queste nella regione contraria. È poi facile a vedersi che l'una delle espressioni in discorso deve avere segno diverso dall' altra, perchè altrimenti nell'uguagliarle non otterrebesi la precedente equazione differenziale.

Ponendo dunque

$$a^2 - b^2 = e^2 ,$$

risulta

$$\int xdl = -\frac{a}{b^2}\int dy \sqrt{b^4 + e^2y^2}$$

$$\int ydl = \frac{b}{a^2}\int dx \sqrt{a^4 - e^2x^2}.$$

Ora la formola (α) del § 9, fatto $A = b^2$, $B = e$, somministra

$$\int dy \sqrt{b^4 + e^2y^2} = \frac{y}{2}\sqrt{b^4 + e^2y^2} + \frac{b^4}{2e} log\left(ey + \sqrt{b^4 + e^2y^2}\right) + C'.$$

La formola citata darebbe anche l' equivalente di $\int dx \sqrt{a^4 - e^2x^2}$, se si cambiassero le tre quantità b, e y nelle a, e $\sqrt{-1}$, x. Ma per ischivare le quantità immaginarie, conviene piuttosto moltiplicare e dividere la funzione da intégrarsi pel proprio radicale e inferirne

$$\int dx \sqrt{a^4 - e^2x^2} = \int \frac{a^4 dx}{\sqrt{a^4 - e^2x^2}} \int \frac{e^2x^2 dx}{\sqrt{a^4 - e^2x^2}}.$$

Infatti, poichè

$$\int \frac{a^4 . dx}{\sqrt{a^4 - e^2x^2}} = \frac{a^4}{e} \; Arc\left(sen = \frac{ex}{a^2}\right),$$

e poichè la formola d' integrazione per parti

$$\int P dQ = PQ - \int Q dP,$$

messo

$$P = x,\ dQ = \frac{e^2 x dx}{\sqrt{a^4 - e^2 x^2}},$$

e dedotto

$$dP = dx,\ Q = -\sqrt{a^4 - e^2 x^2},$$

(al qual ultimo risultato giungiamo con sostituire al binomio $a^4 - e^2 x^2$ una nuova indeterminata) offre

$$\int \frac{e^2 x^2 dx}{\sqrt{a^4 - e^2 x^2}} = -x\sqrt{a^4 - e^2 x^2} + \int dx \sqrt{a^4 - e^2 x^2},$$

si vede che la superiore equazione si può scrivere così

$$\int dx \sqrt{a^4 - e^2 x^2} = \frac{a^4}{e} Arc\left(sen = \frac{ex}{a^2}\right)$$

$$+ x\sqrt{a^4 - e^2 x^2} - \int dx \sqrt{a^4 - e^2 x^2},$$

ossia trasponendo l' ultimo termine e quindi dividendo per 2,

$$\int dx \sqrt{a^4 - e^2 x^2} = \frac{a}{2e} Arc\left(sen = \frac{ex}{a^2}\right)$$

$$+ \frac{x}{2}\sqrt{a^4 - e^2 x^2} + C''.$$

Finalmente, attese le espressioni degli integrali $\int x dl$, $\int y dl$, e le formole (A), se si definiscono gl' integrali

stessi trai soliti valori delle variabili x, y, l, si conseguisce

$$X = -\frac{a}{2eb^2(l_{\prime\prime}-l_{\prime})}\left\{e\left(y_{\prime\prime}\sqrt{b^4+e^2y_{\prime\prime}^2}-y_{\prime}\sqrt{b^4+e^2y_{\prime}^2}\right)\right.$$

$$\left.+b^4\log\frac{ey_{\prime\prime}+\sqrt{b^4+e^2y_{\prime\prime}^2}}{ey_{\prime}+\sqrt{b^4+e^2y_{\prime}^2}}\right\},$$

$$Y = \frac{b}{2ea^2(l_{\prime\prime}-l_{\prime})}\left\{e\left(x_{\prime\prime}\sqrt{a^4-e^2x_{\prime\prime}^2}-x_{\prime}\sqrt{a^4-e^2x_{\prime}^2}\right)\right.$$

$$\left.+a^4\left(Arc\left(sen=\frac{ex_{\prime\prime}}{a^2}\right)-Arc\left(sen=\frac{ex_{\prime}}{a^2}\right)\right)\right\}.$$

§. 12. Corollario 1.o Quando l'arco proposto incomincia dal vertice della ellisse, pel quale è $x_{\prime}=-a$, $y_{\prime}=o$, $l_{\prime}=o$, abbiamo

$$X = -\frac{a}{2eb^2l_{\prime\prime}}\left\{ey_{\prime\prime}\sqrt{b^4+e^2y_{\prime\prime}^2}+b^4\log\frac{ey_{\prime\prime}+\sqrt{b^4+e^2y_{\prime\prime}^2}}{b^2}\right\},$$

$$Y = \frac{b}{2ea^2l_{\prime\prime}}\left\{e\left(x_{\prime\prime}\sqrt{a^4-e^2x_{\prime\prime}^2}+a^2b\right)+a^4\left(Arc\left(sen=\frac{ex_{\prime\prime}}{a^2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-Arc\left(sen=\frac{e}{a}\right)\right)\right\}.$$

E quando incomincia da quello dei vertici predetti, pel quale è $x_{\prime}=o$, $y_{\prime}=b$, $l_{\prime}=\frac{L}{4}$, dove con L si rappresenti tutta la curva elittica, si ottiene

$$X = -\frac{a}{2\,eb^2\left(l_{\prime\prime}-\frac{L}{4}\right)}\left\{ e\left(y_{\prime\prime}\sqrt{b^4+e^2y^2}-ab^2\right) + b^4 \log \frac{ey_{\prime\prime}+\sqrt{b^4+e^2y_{\prime\prime}^2}}{b\,(e+a)} \right\}$$

$$Y = \frac{b}{2ea^2\left(l_{\prime\prime}-\frac{L}{4}\right)}\left\{ ex_{\prime\prime}\sqrt{a^4-e^2x_{\prime\prime}^2} + a^4 \, Arc\left(sen = \frac{ex_{\prime\prime}}{a^2}\right)\right\}$$

§ 13. Scolio 1.° E qui ancora vuolsi avvertire che i valori delle X, Y dati dai due paragrafi anteriori, accompagnati respettivamente colle $Y=o$, $X=o$, stabiliscono la posizione del centro di gravità di due archi d'ellisse simmetrici attorno ai diametri $2a$, $2b$, e separati o nò dall'arco $2l_{\prime}$.

§ 14. Corollario 2.° Le coordinate del centro di gravità del quadrante ellittico risultano dalle prime formole del § 12, ponendovi $x_{\prime\prime}=o$, $y_{\prime\prime}=b$, $l_{\prime\prime}=\frac{L}{4}$, oppure dalle seconde, con fare $x_{\prime\prime}=a$, $y_{\prime\prime}=o$, $l_{\prime\prime}=\frac{L}{2}$, e sono

$$X = \mp \frac{2a}{eL}\left(ea+b^2 \log \frac{e+a}{b}\right),$$

$$Y = \frac{2b}{eL}\left(eb+a^2 \, Arc\left(sen = \frac{e}{a}\right)\right),$$

servendo il segno superiore pel quadrante che giace nella regione delle x negative, e l'inferiore per l'altro.

E le coordinate del centro di gravità d' una semiellisse sottesa da uno de' diametri $2b$, $2a$, sono respettivamente

$$X = \mp \frac{2a}{eL}\left(ea + b^2 \log \frac{e+a}{b} \right), \quad Y = o\,;$$

$$X = o, \quad Y = \frac{2b}{eL}\left(eb + a^2 \; Arc\left(sen = \frac{e}{a}\right) \right),$$

valendo pe' segni le già date avvertenze.

§ 15. Scolio 2.º È inutile osservare che le formole del § 11 si debbono trasformare in quelle del § 3, ove si ponga $a = b = r$, e per conseguenza $e = o$. Noteremo soltanto che, per questo valore di e, il secondo membro d'ognuna di quelle formole diventa $\frac{o}{o}$, e che per operare l'indicata trasformazione bisogna dunque far uso della regola che in ordine a tal circostanza ci viene insegnata dal Calcolo Differenziale.

§ 16. Scolio 3.º Per non intraprendere un lavoro di soverchio esteso, diretto a determinare i valori degli archi ellittici $l_{/}$, $l_{//}$, L in funzione delle coordinate de'loro punti estremi, inviamo il nostro Lettore alle Applicazioni delle quali al § 4. In esse è dato l' integrale della differenziale

$$\frac{(A + Bx^2)\, dx}{\sqrt{1 - p^2 x^2} \cdot \sqrt{1 - q^2 x^2}} \text{ (*)}$$

dal quale emergono i valori di quegli archi, quando si faccia

(*) Lacroix. Traitè du Calcul Diff. et Integ. T. II n.º 504.

$$A=1\ ,\ B=-\frac{e^2}{a^4}\ ,\ p=\frac{1}{a}\ ,\ q=\frac{e}{a^2}\ ,$$

e si comprenda l'integrale medesimo trai limiti di essi.

Eliminando infatti la y dalle equazioni

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2\ ,\ dl=\frac{dx}{a^2y}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}\ ,$$

ed appurando si ottiene

$$dl=\frac{dx\ \sqrt{a^4-e^2x^2}}{a\ \sqrt{a^2-x^2}}\ ,$$

ossia, moltiplicando sopra e sotto per $a^4\ \sqrt{a^4-e^2x^2}$,

$$dl=\frac{dx\left(1-\frac{e^2x^2}{a^4}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^4}}}\ ;$$

lo che è quanto ec.

PROBLEMA V.

TROVARE IL CENTRO DI GRAVITA' D'UN ARCO QUALUNQUE D'IPERBOLA.

§ 17. Situando gli assi delle x, y sui diametri detti reale ed immaginario dell'iperbola, abbiamo per equazione di questa curva

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2\ ,$$

da cui risulta

$$a^2ydy-b^2xdx=o\ .$$

L'origine degli archi si suol qui collocare o al vertice dell' iperbola, pel quale sono $x_{,}=a$, $y_{,}=o$, o a quello cui competono $x_{,}=-a$, $y_{,}=o$. Comunque si faccia ottiensi

$$dl=\frac{dx}{a^2y}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}=\frac{dy}{b^2x}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}.$$

Posto dunque

$$e^2=a^2+b^2,$$

si conseguisce

$$xdl=\frac{ady}{b^2}\sqrt{e^2y^2+b^4},$$

$$ydl=\frac{bdx}{a^2}\sqrt{e^2x^2-a^4},$$

e per la formola (α) del § 9,

$$\int xdl=\frac{a}{2eb^2}\left\{ey\sqrt{e^2y^2+b^4}+b^4\log\left(ey+\sqrt{e^2y^2+b^4}\right)\right\}+C',$$

$$\int ydl=\frac{b}{2ea^2}\left\{ex\sqrt{e^2x^2-a^4}-a^4\log\left(ex+\sqrt{e^2x^2-a^4}\right)\right\}+C''.$$

Ciò premesso, se si definiscono gli integrali trai soliti valori delle x, y, l, dalle formole (A) nascono le due

$$X=\frac{a}{2eb^2(l_{\prime\prime}-l_{\prime})}\left\{e\left(y_{\prime\prime}\sqrt{e^2y_{\prime\prime}^{\,2}+b^4}-y_{\prime}\sqrt{e^2y_{\prime}^{\,2}+b^4}\right)\right.$$

$$\left.+\,b^4\log\frac{ey_{\prime\prime}+\sqrt{e^2y_{\prime\prime}^{\,2}+b^4}}{ey_{\prime}+\sqrt{e^2y_{\prime}^{\,2}+b^4}}\right\},$$

$$Y=\frac{b}{2ea^2(l_{\prime\prime}-l_{\prime})}\left\{e\left(x_{\prime\prime}\sqrt{e^2x_{\prime\prime}^{\,2}-a^4}-x_{\prime}\sqrt{e^2x_{\prime}^{\,2}-a^4}\right)\right.$$

$$\left.-\,a^4\log\frac{ex_{\prime\prime}+\sqrt{e^2x_{\prime\prime}^{\,2}-a^4}}{ex_{\prime}+\sqrt{e^2x_{\prime}^{\,2}-a^4}}\right\}.$$

§ 18. Corollario. Quando l' arco dell' iperbola incomincia dal vertice pel quale è $x_{\prime}=a$, $y_{\prime}=o$, $l_{\prime}=o$, risulta

$$X=\frac{a}{2eb^2l_{\prime\prime}}\left\{\;ey_{\prime\prime}\sqrt{e^2y_{\prime\prime}^{\,2}+b^4}+b^4\log\frac{ey_{\prime\prime}+\sqrt{e^2y_{\prime\prime}^{\,2}+b^4}}{b^2}\right\},$$

$$Y=\frac{b}{2ea^2l_{\prime\prime}}\left\{e\left(x_{\prime\prime}\sqrt{e^2x_{\prime\prime}^{\,2}-a^4}-a^2b\right)-a^4\log\frac{ex_{\prime\prime}+\sqrt{e^2x_{\prime\prime}^{\,2}-a^4}}{(e+b)\,a}\right\};$$

e quando incomincia dal vertice pel quale è invece $x_{\prime}=-a$, $y_{\prime}=o$, $l_{\prime}=o$, valgono queste medesime formole, cambiate le a, $x_{\prime\prime}$ in $-a$, $-x_{\prime\prime}$.

§ 19. Scolio. Qui si vogliono ripetere considerazioni analoghe a quelle istituite ai §§ 15, 16. Relativamente

a quest' ultime diremo soltanto che l' integrale della funzione registrata nel citato paragrafo, si adatta ad esprimere gli archi l, $l_{,}$; $l_{,,}$ dell' iperbola, ponendo

$$A = -1,\ B = \frac{e^2}{a^4}\ ,\ p = \frac{1}{a},\ q = \frac{e}{a^2}.$$

Eliminando infatti la y dalla equazione della iperbola e dalla $dl = \frac{dx}{a^2 y} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}$, moltiplicando e dividendo la risultante per $\sqrt{e^2 x^2 - a^4}$, ed appurando si ha

$$dl = \frac{dx\left(\frac{e^2 x^2}{a^4} - 1\right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{e^2 x^2}{a^4}}}.$$

PROBLEMA VI.

TROVARE IL CENTRO DI GRAVITA' D' UN ARCO QUALUNQUE DI CICLOIDE.

§ 20. Se si prende per asse delle x e per origine delle coordinate l' asse ed il vertice della cicloide, e se si rappresenta con r il raggio del circolo generatore della cicloide stessa, l' equazione differenziale di questa curva, nella quale le x, y crescono e decrescono insieme, è

$$dy = dx \sqrt{\frac{2r - x}{x}}\ ,$$

quindi somministra

$$dl = dx \sqrt{\frac{2r}{x}} \,,$$

$$xdl = dx \sqrt{2rx} \,,$$

$$ydl = ydx \sqrt{\frac{2r}{x}} \,.$$

Le due prime di queste equazioni danno immediatamente

$$\int dl = 2 \sqrt{2rx} + C'$$

$$\int xdl = \frac{2}{3} x \sqrt{2rx} + C'' \,.$$

In quanto poi alla terza basta fare, nella formola del § 11,

$$P = y \,,\ dQ = \frac{dx}{\sqrt{x}} \,,$$

derivar quindi

$$dP = dy \,,\ Q = 2 \sqrt{x} \,,$$

e inferirne

$$\int ydl = \sqrt{2r} \left[2y \sqrt{x} - 2 \int dx \sqrt{2r - x} \right] + C''' \,.$$

Ma perchè, con sostituire al binomio $2r - x$ una nuova indeterminata, hassi

$$2 \int dx \sqrt{2r - x} = -\frac{4}{3} \sqrt{(2r - x)^3} \,,$$

concludiamo essere

$$\int y\,dl = \sqrt{2r}\left[2y\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{(2r-x)^3}\right] + C''.$$

Ciò posto, se si definiscono gli integrali trai valori $x_{\prime}, y_{\prime}; x_{\prime\prime}, y_{\prime\prime}$ delle x, y, per le formole (A) si ottiene

$$X = \frac{1}{3}\left[x_{\prime} + \sqrt{x_{\prime}x_{\prime\prime}} + x_{\prime\prime}\right],$$

$$Y = \frac{1}{3}\,\frac{5\left(y_{\prime\prime}\sqrt{x_{\prime\prime}} - y_{\prime}\sqrt{x_{\prime}}\right) + 2\left(\sqrt{(2r-x_{\prime\prime})^3} - \sqrt{(2r-x_{\prime})^3}\right)}{\sqrt{x_{\prime\prime}} - \sqrt{x_{\prime}}}.$$

§ 21. Corollario 1.° Se l'arco incomincia dal vertice della curva dove $x_{\prime}=o$, $y_{\prime}=o$, queste formole divengono

$$X = \frac{1}{3}x_{\prime\prime},\ Y = y_{\prime\prime} + \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{(2r-x_{\prime\prime})^3} - \sqrt{(2r)^3}}{\sqrt{x_{\prime\prime}}}.$$

§ 22. Scolio. Circa le formole de' due paragrafi precedenti, dopo avere ripetuto quanto si è detto al § 8, possiamo per incidenza osservare, che un tronco di cono le cui basi minore e maggiore siano proporzionali alle $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$ equivale al cilindro della stessa altezza avente la base proporzionale alla X.

§ 23. Corollario 2.° Le coordinate del centro di gravità della semicloide sono

$$X = \frac{2}{3}r\ ;\ Y = \left(\pi - \frac{4}{3}\right)r = \frac{9}{5}r$$

prossimamente, e dalla intiera cicloide

$$X = \frac{2}{3}r\ ,\ Y = o\ .$$

PROBLEMA VII.

TROVARE IL CENTRO DI GRAVITA' D' UN ARCO QUALUNQUE DI LOGARITMICA O LOGISTICA.

§ 24. L'equazione

$$a^x = y$$

è quella della logaritmica, curva d' un sol ramo che giace tutto nella regione delle y positive, l' asse delle quali lo taglia in due parti nel punto cui appartengono le coordinate $x = o, y = 1$. La porzione di tal ramo che si distende dal lato delle ascisse positive si va indefinitiaamente discostando dall' asse di queste. Il contrario avviene per l' altra porzione alla quale per conseguenza serve d' assintoto l' asse delle ascisse.

L' indicata equazione, chiamando A il modulo del sistema logaritmico di base a, somministra

$$dx = \frac{Ady}{y},$$

onde, avute pei segni le solite avvertenze, si ottiene

$$dl = \frac{dy}{y} \sqrt{A^2 + y^2},$$

$$xdl = \frac{xdy}{y} \sqrt{A^2 + y^2},$$

$$ydl = dy \sqrt{A^2 + y^2}.$$

È facile integrare la prima e terza di queste funzioni.

Per l' una infatti, posto

$$\sqrt{A^2 + y^2} = t,$$

risulta

$$y^2 = t^2 - A^2 , \quad \frac{dy}{y} = \frac{tdt}{t^2 - A^2} ;$$

$$\frac{dy}{y} \sqrt{A^2 + y^2} = \frac{t^2 dt}{t^2 - A^2} = dt - \frac{A}{2} \left[\frac{dt}{t+A} - \frac{dt}{t-A} \right]$$

ed

$$\int \frac{dy}{y} \sqrt{A^2 + y^2} = t - \frac{A}{2} \log \frac{t+A}{t-A} + C' ,$$

cioè

$$l = \sqrt{A^2 + y^2} - \frac{A}{2} \log \frac{\sqrt{A^2 + y^2} + A}{\sqrt{A^2 + y^2} - A} + C' .$$

Per l' altra poi, facendo $B = 1$ nella formola (α) del § 9, si ha subito

$$\int y dl = \frac{1}{2} \left[y \sqrt{A^2 + y^2} + A^2 \cdot \log \left(y + \sqrt{A^2 + y^2} \right) \right] + C'' \text{ (*)}$$

Ma in ordine alla seconda delle funzioni suddette non conosciamo maniera d' integrarla che per serie. A quest' effetto dalla formola (§ 11) d' integrazione per parti incominciamo a dedurre

$$\int x dl = xl - \int l dx .$$

(*) Il Padre Gregorio Fontana nella sua Memoria *sopra il centro di gravità della logaritmica finita e infinitamente lunga*, registrata nel Tomo IV degli Atti della R. Accademia di Torino perviene a questo risultato col seguente artifizio. Essendo

Avvertiamo dipoi che, con sostituire ad l, dx i loro equivalenti, si ha

$$\int l dx = A\int \frac{dy}{y}\sqrt{A^2+y^2} - \frac{A^2}{2}\int\frac{dy}{y} \log\frac{\sqrt{A^2+y^2}+A}{\sqrt{A^2+y^2}-A}$$

$$= Al - \frac{A^2}{2}\int\frac{dy}{y} \log\frac{\sqrt{A^2+y^2}+A}{\sqrt{A^2+y^2}-A}$$

Ponendo inoltre

$$z = \frac{\sqrt{A^2+y^2}+A}{\sqrt{A^2+y^2}-A},$$

$$dy\sqrt{A^2+y^2} = \frac{dy}{2}\sqrt{A^2+y^2} + \frac{\frac{dy}{2}(A^2+y^2)}{\sqrt{A^2+y^2}}$$

$$= \frac{dy}{2}\sqrt{a^2+y^2} + \frac{\frac{dy}{2}\; y^2}{\sqrt{A^2+y^2}} + \frac{\frac{A^2dy}{2}}{\sqrt{A^2+y^2}},$$

se si avverte che i due primi termini equivalgono alla differenziale della funzione $\frac{y}{2}\sqrt{A^2+y^2}$, e se si moltiplica e si divide il terzo pel binomio $y+\sqrt{A^2+y^2}$, appurando si ottiene

$$dy\sqrt{A^2+y^2} = d\left(\frac{y}{2}\sqrt{A^2+y^2}\right) + \frac{A^2}{2}\,\frac{dy+\frac{y\,dy}{\sqrt{A^2+y^2}}}{y+\sqrt{A^2+y^2}},$$

e perciò

$$\int dy\sqrt{A^2+y^2} = \frac{y}{2}\sqrt{A^2+y^2} + \frac{A^2}{2}\log\left(y+\sqrt{A^2+y^2}\right) + C''.$$

risulta

$$y^2 = \frac{4A^2 z}{(1-z)^2} ,$$

e differenziando si ottiene

$$y dy = \frac{2A^2 dz \ (1+z)}{(1-z)^3} :$$

equazione che, divisa per la precedente, si trasforma in questa

$$\frac{dy}{y} = \frac{(1+z)\, dz}{2\,(1-z)\, z} = \frac{(1-z+2z)\ dz}{2\ (1-z)\ z}$$

$$= \frac{dz}{2.z} + \frac{dz}{1-z} ;$$

e somministra

$$\frac{dy}{y} \ log \ \frac{\sqrt{A^2+y^2}+A}{\sqrt{A^2+y^2}-A} = \frac{dz \ log. \ z}{2. \ z} + \frac{dz. log \ z}{1-z}$$

ed

$$\int \frac{dy}{y} \ log \ \frac{\sqrt{A^2+y^2}+A}{\sqrt{A^2+y^2}-A} = \frac{1}{4} \ log^2 z - \int \frac{dz}{1-z} \ log \ z .$$

Per compiere questa integrazione rimane dunque a doversi rintracciare l'equivalente di $\int \frac{dz}{1-z} \ log z$, del che troviamo essersi occupato il Lacroix (*) e avere ottenuto

$$\int \frac{dz}{1-z} \ log z = log z. log \ \frac{1}{1-z} - z - \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{9} \ \text{ec.}$$

(*) Traité ec. T. II n. 428.

Riepilogando risulta pertanto

$$\int x dl = \left(x - A\right) l + \frac{A^2}{2}\left[\frac{1}{4}\log^2 z - \log z . \log \frac{1}{1-z} + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \text{ec.}\right]$$

$$= \left(x - A\right) l + \frac{A^2}{2}\left[\log z . \log \left(1 - z\right) \sqrt[4]{z} + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \text{ec.}\right].$$

Ora se si comprendono gli integrali trai soliti valori delle x, y, l, e se si rappresenta con $F(z_{,}, z_{,,})$ la funzione

$$\frac{A^2}{2}\left[\log z \log \left(1 - z\right) \sqrt[4]{z} + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \text{ec.}\right]$$

definita trai valori $z_{,}$, $z_{,,}$ della z, corrispondenti ai predetti della y, per le formole (A) si conseguisce

$$X = \frac{x_{,,}\, l_{,,} - x_{,}\, l_{,} + F(z_{,}, z_{,,})}{l_{,,} - l_{,}} - A,$$

$$Y = \frac{1}{2(l_{,,} - l_{,})}\left\{y_{,,}\sqrt{A^2 + y_{,,}^2} - y_{,}\sqrt{A^2 + y_{,}^2} + A^2 \log \frac{y_{,,} + \sqrt{A^2 + y_{,,}^2}}{y_{,} + \sqrt{A^2 + y_{,}^2}}\right\}.$$

I valori delle $l_{,}$, $l_{,,}$ si ottengono dalla superiore espressione della l, ponendovi respettivamente $x_{,}, y_{,}$; $x_{,,}$, $y_{,,}$ per x, y.

§ 25. Corollario. Se si prende per origine degli archi il punto dove la logistica incontra l' asse delle y, per un arco che incominci da quel punto avremo

$$x_{\prime}=o,\ y_{\prime}=1,\ l_{\prime}=o,\ z_{\prime}=\frac{\sqrt{A^2+1}+A}{\sqrt{A^2+1}-A},$$

e le formole precedenti diverranno

$$X=\frac{F(z_{\prime},\ z_{\prime\prime})}{l_{\prime\prime}}+x_{\prime\prime}-A,$$

$$Y=\frac{1}{2l_{\prime\prime}}\left\{y_{\prime\prime}\sqrt{A^2+y_{\prime\prime}^{\,2}}-\sqrt{A_2+1}\right.$$

$$\left.+A^2\log\frac{y_{\prime\prime}+\sqrt{A^2+y_{\prime\prime}^{\,2}}}{1+\sqrt{A^2+1}}\right\},$$

essendo al solito $F(z_{\prime},\ z_{\prime\prime})$ compresa trai valori $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$ della z, il primo de' quali, mentre pel sistema logaritmico di base a è il precedente, pei sistemi neperiano e tabulare è respettivamente

$z_{\prime}=5,814\ \ldots\ldots;\ z_{\prime}=11,111\ \ldots\ldots$

§ 26. Scolio. Noteremo di volo che il valore della Y testè dedotto non è diverso da quello rinvenuto dal P. Gregorio Fontana. (*)

Per considerare tutto il ramo della curva che si estende dal lato delle ascisse negative, bisogna fare $x_{\prime\prime}=-\infty$, $y_{\prime\prime}=o$, lo che rende

$$X=-\infty,\ Y=\frac{1}{\infty}.$$

(*) Memoria citata.

Siccome questa conseguenza aveva già fatto dire al P. Grandi (*), che la logaritmica, ed altre curve che a lei si assomigliano protratte che siano all' infinito non hanno centro di gravità, il P. Fontana nella Memoria suddetta si pose a confutare siffatta asserzione, con aver ricorso alla metafisica distinzione trallo zero assoluto, e il valore del simbolo $\frac{1}{\infty}$. La sua finale conclusione fu però la seguente. « Quanto più grande si prende « l' arco della logistica tanto più si avvicina all' asse il « suo centro di gravità, e facendosi l' arco maggiore « d' ogni data quantità, diventa viceversa minore d' ogni « data quantità la distanza del centro dall' asse. »

PROBLEMA VIII.

TROVARE IL CENTRO DI GRAVITA' D' UN ARCO QUALUNQUE DI CATENARIA OMOGENEA.

§ 27. Prendendo per origine delle coordinate, e per asse delle x il punto infimo della curva, e la verticale condotta per esso, l' equazione della catenaria omogenea ci è data dalla Meccanica espressa così

$$ldy = Adx,$$

dove A rappresenta un coefficiente costante, lineare, positivo. Hassi dunque

$$dx = \frac{ldl}{\sqrt{A^2+l^2}}, \quad dy = \frac{Adl}{\sqrt{A^2+l^2}}.$$

(*) Geom demonstratio theorem. Hugenianorum circa logisticam. Flor. 1701.

Dall' una di queste equazioni risulta tosto

$$x = \sqrt{A^2 + l^2} + C' .$$

Per eseguir poi l' integrazione dell' altra, moltipliche-remo e divideremo il secondo suo membro pel binomio $l + \sqrt{A^2 + l^2}$,e si avrà

$$dy = \frac{\frac{Adl}{\sqrt{A^2+l^2}}(l+\sqrt{A^2+l^2})}{l+\sqrt{A^2+l^2}} = A\,\frac{dl + \frac{ldl}{\sqrt{A^2+l^2}}}{l+\sqrt{A^2+l^2}} ,$$

ossia, giacchè il numeratore di questa frazione è la differenziale esatta del denominatore,

$$y = A \log (l + \sqrt{A^2+l^2}) + C'' .$$

Ponendo pure l' origine degli archi nel punto infimo della curva abbiamo in pari tempo $x=o$, $y=o$, $l=o$, e per conseguenza

$$C' = - A,\ C'' = - A \log A ,$$

ed

$$x = \sqrt{A^2 + l^2} - A ,\ y = A \log \frac{l + \sqrt{A^2+l^2}}{A} .$$

Ora la prima di queste offre

$$l = \sqrt{2Ax + x^2} ,$$

e converte la seconda in

$$y = A \log \frac{A+x+\sqrt{2Ax+x^2}}{A} ,$$

ch'è l' equazione della catenaria in termini finiti, dalla quale si deduce: non avere questa curva le ascisse ne-

gative, perchè ove si ponga tale la x, la y diventa immaginaria. Il valore assoluto della x può essere infatti o minore, o uguale, o maggiore di $2A$. Ma per $x<o$ nel primo di questi tre casi risulta negativo il binomio $2Ax+x^2$, mentre nel secondo e terzo ciò si verifica pel trinomio $A+x+\sqrt{2Ax+x^2}$; lo che è quanto ec.

Dopo queste premesse osserviamo essere

$$xdl = dl\sqrt{A^2+l^2}-Adl$$

$$ydl = Adl\,log\,(l+\sqrt{A^2+l^2})-Adl\,log\,A\,.$$

Ma, per la formola (α) del § 9, è

$$\int dl\sqrt{A^2+l^2}=\frac{1}{2}\left[l\sqrt{A^2+l^2}+A^2\,log\left(l+\sqrt{A^2+l^2}\right)\right];$$

dunque

$$\int xdl=\frac{1}{2}\left[l\left(\sqrt{A^2+l^2}-2A\right)+A^2\,log\left(l+\sqrt{A^2+l^2}\right)\right]+C'''\,.$$

Sostituendo poi ad $l+\sqrt{A^2+l^2}$ una sola indeterminata t, avrebbesi modo di integrare la funzione $dl\,log\,(l+\sqrt{A^2+l^2})$, e d'ottenere così in termini finiti anche l'equivalente di $\int ydl$. Ma si perviene a questo risultato con maggior prontezza, deducendo colla solita formola (§ 11) d'integrazione per parti

$$\int ydl=yl-\int ldy+C^{IV}$$
$$=yl-Ax+C^{IV}\,,$$

e poste per x, y le loro espressioni in l

$$\int ydl=A\left[l\,log\,\frac{l+\sqrt{A^2+l^2}}{A}-\sqrt{A^2+l^2}+A\right]+C^{IV}\,.$$

Comprendendo ora gli integrali trai valori $l_{,}$ $l_{,,}$ della l, le formole (A) somministrano

$$X=\frac{1}{2\,(l_{,,}-l_{,})}\left\{l_{,,}\left(\sqrt{A^2+l_{,,}^2}-2A\right)-l_{,}\left(\sqrt{A^2+l_{,}^2}-2A\right)\right.$$
$$\left.+A^2\log\frac{l_{,,}+\sqrt{A^2+l_{,,}^2}}{l_{,}+\sqrt{A^2+l_{,}^2}}\right\},$$

$$Y=\frac{A}{l_{,,}-l_{,}}\left\{l_{,,}\log\frac{l_{,,}+\sqrt{A^2+l_{,,}^2}}{A}-l_{,}\log\frac{l_{,}+\sqrt{A^2+l_{,}^2}}{A}\right.$$
$$\left.-\sqrt{A^2+l_{,,}^2}+\sqrt{A^2+l_{,}^2}\right\}.$$

§ 28. Corollario 1.° Se l'arco proposto incomincia dal vertice della curva è $l_{,}=o$, perciò

$$X=\frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2+l_{,,}^2}-2A\right)+\frac{A^2}{2l_{,,}}\log\frac{l_{,,}+\sqrt{A^2+l_{,,}^2}}{A}$$

$$Y=\frac{A}{l_{,,}}\left\{l_{,,}\log\frac{l_{,,}+\sqrt{A^2+l_{,,}^2}}{A}-\sqrt{A^2+l_{,,}^2}+A\right\},$$

oppure

$$X=\frac{1}{2}\left[x_{,,}-A+\frac{Ay_{,,}}{l_{,,}}\right],$$

$$Y=y_{,,}-\frac{Ax_{,,}}{l_{,,}}:$$

§ 29. Corollario 2.° Dalle formole del § precedente risulta che per un arco di catenaria determinato o dall'ascissa $x_{,,}=A$, o dall'ordinata $y_{,,}=A$, abbiamo respettivamente

$$X = \frac{1}{2} \frac{A y_{\prime\prime}}{l_{\prime\prime}}, \quad Y = y_{\prime\prime} - \frac{A^2}{l_{\prime\prime}};$$

$$X = \frac{1}{2}\left(x_{\prime\prime} - A + \frac{A^2}{l_{\prime\prime}}\right), \; Y = \frac{A\,(l_{\prime\prime} - x_{\prime\prime})}{l_{\prime\prime}}.$$

E per un arco consimile $l_{\prime\prime} = A$, sono invece

$$X = \frac{1}{2}\left(x_{\prime\prime} + y_{\prime\prime} - A\right), \; Y = y_{\prime\prime} - x_{\prime\prime}.$$